Ueber algebraische Raumkurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Fritz Löflund
aus Neuenbürg a. d. Enz.

ACAD. LUTHERAN. BIBL.

Tübingen
Druck von H. Laupp jr
1912.

Von der Fakultät angenommen den 2. März 1912.

Meinem lieben Onkel

Herrn **Eduard Löflund** aus Grunbach

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552714_0151

Bei allen Untersuchungen über algebraische Raumkurven hat es sich gezeigt, daß ihre projektiven Eigenschaften wesentlich mit der Zahl der scheinbaren Doppelpunkte zusammenhängen. Eine Art der Erzeugung der algebraischen Raumkurven, welche zu einer Reihe von Sätzen über die scheinbaren Doppelpunkte geführt hat, ist die durch den Schnitt spezieller Flächen, hauptsächlich von Kegel und Monoid, wobei sich die dritte Koordinate als rationale Funktion der beiden anderen ausdrücken läßt. Mit Hilfe einer Darstellung der algebraischen Funktionen, welche Christoffel zum Beweis des Satzes über die Zahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung benützt hat[1]), und welche später mit Erfolg von Fields und Stahl angewandt worden ist, gelingt es nun leicht, jenen Ausdruck für die dritte Koordinate auf eine Form zu bringen, welche die Koordinaten derjenigen Doppelpunkte der Projektionskurve der Raumkurve von einem beliebigen Punkt des Raums auf eine Ebene enthält, die aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind. Man hat damit eine Darstellung der algebraischen Raumkurven gewonnen, welche, wie sich im Verlauf der Abhandlung zeigen wird, besonders dann von Vorteil ist, wenn es sich darum handelt, Beziehungen zwischen den Doppelpunkten einer ebenen Kurve aufzustellen, welche Projektion einer Raumkurve ist.

Herr Professor Dr. v. Brill, auf dessen Anregung die Arbeit entstanden ist, hat mich bei der Ausführung derselben mehrfach mit seinem Rat unterstützt, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank ausspreche.

1) Ann. di. mat., Serie II, Tomo X, S. 81 ff.

1.

Es handelt sich um die Aufgabe, auf einer Riemannschen Verzweigungsfläche, die durch eine Gleichung vom $n$ten Grade in den beiden Variablen x und z $f_n(x,z) = 0$ definiert ist, eine algebraische Funktion σ zu bestimmen, welche in r von den R Doppelpunkten der Riemannschen Fläche zwei verschiedene Werte, in den übrigen Doppelpunkten nur einen Wert annimmt, in Q einzelnen im Endlichen gelegenen Punkten zur 1. Ordnung und in den n unendlich fernen Punkten zur $m$ten Ordnung unendlich wird, sonst aber überall stetig bleibt.

Die Gleichung

$$f_n(x, z) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

in der die Koefficienten a ganze rationale Funktionen von z vom Grad des Index sind und a_0 nicht verschwindet, stellt eine Kurve $n$ter Ordnung dar, welche nur einfache Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzen soll und deren Richtungen nach den n unendlich fernen Punkten alle von einander verschieden sein mögen. Das Polynom $f_n(x, z)$ kann irreduktibel oder reduktibel sein, darf aber jeden irreduktiblen Teiler nur einfach enthalten.

Nach Gleichung (1) ist x selbst eine algebraische Funktion der Riemannschen Fläche, welche im Endlichen überall endlich bleibt und für $z = \infty$ zur 1. Ordnung unendlich wird. Jedem Wert von z entsprechen n Werte je von x und von σ, welche den n Blättern der Riemannschen Fläche eindeutig zugeordnet sind. Sind x_k und σ_k (für $k = 1,2 \ldots n$) diese n Werte, so kann man mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$\psi(t, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{f'(x_k, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_k}, \qquad (2)$$

$$\text{wo } f'(t, z) = \frac{\partial f(t, z)}{\partial t} \text{ ist,}$$

eine Funktion $\psi(t, z)$ von t und z bestimmen, welche für $t = x_k$ den

Wert σ_k annimmt und daher auch einen Ausdruck für die Funktion σ ergibt, wenn die rechte Seite von (2) geeignet umgeformt ist. Die Formel (2) hat nur dann einen Sinn, wenn $f'(x_k, z)$ nicht identisch verschwindet, was durch die oben gemachte Annahme über die irreduktiblen Teiler des Polynoms $f_n(x, z)$ ausgeschlossen ist. Sie gilt jedenfalls für alle diejenigen endlichen Werte von z, für welche x n verschiedene Werte annimmt[1]).

Als Funktion von t allein betrachtet ist $\psi(t, z)$ eine ganze rationale Funktion vom $n-1$ ten Grad, weil $f(t, z)$ durch $t - x_k$ teilbar ist.

Für einen bestimmten endlichen Wert von t aber ist $\psi(t, z)$ einwertige Funktion von z; denn beschreibt z in der einfachen z-Ebene einen geschlossenen Weg, so kann sich zwar die Reihenfolge der einzelnen Glieder ändern, ihre Summe aber kehrt zu dem Anfangswert zurück. Für endliche Werte von z bleibt der Quotient $\frac{f(t, z)}{t - x_k}$ endlich, für $z = \infty$ dagegen wird er zur $n-1$ ten Ordnung unendlich. Für $z = \infty$ wird auch $f'(x_k, z)$ zur $n-1$ ten, σ_k zur m ten Ordnung und daher $\psi(t, z)$ zur m ten Ordnung unendlich.

Im Endlichen wird die Funktion $\psi(t, z)$ unendlich in den Nullpunkten von $f'(x_k, z)$, d. h. in den Doppel- und Verzweigungspunkten von $f_n(x, z) = 0$, welche alle im Endlichen liegen, weil die Richtungen nach den n unendlich fernen Punkten von $f_n(x, z) = 0$ alle von einander verschieden sind. Außerdem wird $\psi(t, z)$ noch in den Unstetigkeitspunkten von σ zur 1. Ordnung unendlich. Alle diese Punkte werden der Einfachheit halber gemeinsam mit $x = \alpha_i$, $z = \beta_i$ bezeichnet. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß die Abscissen z der R Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ und der Q Unstetigkeitspunkte von σ alle von einander verschieden sind, daß nur Verzweigungspunkte 1. Ordnung vorhanden sind, und daß in keinem Doppelpunkt noch eine Verzweigung eintritt. Denn durch eine Drehung des Koordinatensystems kann stets bewirkt werden, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Hat $f_n(x, z) = 0$ für $z = \beta_i$ einen Doppelpunkt und sind $x = x_1 = x_2 = \alpha_i$ die beiden zusammenfallenden Werte von x, σ_1 und σ_2 die zugehörigen Werte von σ, welche nach Voraussetzung

1) Bauer, Vorlesungen über Algebra, 32 u. 33.

endlich bleiben, so werden für $z = \beta_i$ $f'(x_1, z)$ und $f'(x_2, z)$ zur 1. Ordnung null und die beiden Glieder

$$\frac{\sigma_1}{f'(x_1, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_2}{f'(x_2, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_2} \quad \text{in (2)}$$

unendlich wie $\frac{1}{z - \beta_i}$. Die $n - 2$ übrigen Glieder bleiben entweder endlich, wenn für $z = \beta_i$ keine Verzweigung der Riemannschen Fläche eintritt, oder sie werden zum Teil unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$, wenn noch Verzweigungspunkte vorhanden sind.

Daraus folgt aber

$$\lim_{z = \beta_i} \psi(t, z)\,(z - \beta_i) = \lim_{z = \beta_i} \frac{f(t, z)}{t - \alpha_i} \left(\frac{\sigma_1}{f'(x_1, z)} + \frac{\sigma_2}{f'(x_2, z)} \right) (z - \beta_i)$$

$$= A_i \frac{f(t, \beta_i)}{t - \alpha_i},$$

wenn A_i der endliche Grenzwert ist, den der Ausdruck

$$\left(\frac{\sigma_1}{f'(x_1, z)} + \frac{\sigma_2}{f'(x_2, z)} \right) (z - \beta_i) \text{ für } z = \beta_i \text{ annimmt.}$$

Weil $\psi(t, z)$ einwertige Funktion von z ist, so können in der Reihenentwicklung für $z = \beta_i$ nur ganze Potenzen von $z - \beta_i$ vorkommen, weshalb die Differenz

$$\psi(t, z) - A_i \frac{f(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)\,(z - \beta_i)}$$

für einen Wert $z = \beta_i$, für den $f_n(x, z) = 0$ einen Doppelpunkt hat, nicht mehr unendlich wird.

2. Wird für $z = \beta_i$ und $x = x_1 = \alpha_i$ die Funktion σ zur 1. Ordnung unendlich, ohne daß in diesem Punkt die Riemannsche Fläche sich verzweigt, so wird infolge der gemachten Voraussetzungen nur das Glied $\frac{\sigma_1}{f'(x_1, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_1}$ für $z = \beta_i$ unendlich wie $\frac{1}{z - \beta_i}$, während alle anderen Glieder wie im Fall 1. entweder endlich bleiben oder nur wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$ unendlich werden. Man erhält dann

$$\lim_{z = \beta_i} \psi(t, z)\,(z - \beta_i) = A_i \frac{f(t, \beta_i)}{t - \alpha_i},$$

wo wieder A_i eine Konstante ist.

Ist dagegen der Punkt $z = \beta_i$, $x = \alpha_i$, in dem σ unendlich wird, zugleich ein Verzweigungspunkt und sind $x = x_1 = x_2 = \alpha_i$ die beiden zusammenfallenden Werte von x, σ_1 und σ_2 die zugehörigen Werte von σ, so werden für $z = \beta_i$ nur die beiden Glieder

$$\frac{\sigma_1}{f'(x_1, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_2}{f'(x_2, z)} \frac{f(t, z)}{t - x_2}$$

unendlich wie $\frac{1}{z - \beta_i}$, während alle andern Glieder höchstens wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$ unendlich werden. Denn für $z = \beta_i$ werden $f'(x_1, z)$ und $f'(x_2, z)$ null wie $\sqrt{z - \beta_i}$ und σ_1 sowie σ_2 unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$.

Man erhält daher wie in den vorhergehenden Fällen

$$\lim_{z = \beta_i} \psi(t, z)\,(z - \beta_i) = A_i \frac{f(t, \beta_i)}{t - \alpha_i},$$

woraus folgt, daß die Differenz $\psi(t, z) - A_i \frac{f(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)\,(z - \beta_i)}$ für einen Wert $z = \beta_i$, für welchen σ unstetig wird, endlich bleibt.

3. Findet endlich für $z = \beta_i$ eine Verzweigung statt, ohne daß $f_n(x, z) = 0$ einen Doppelpunkt hat oder σ unendlich wird, so werden alle Glieder höchstens wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$ unendlich. Der Grenzwert $\lim_{z = \beta_i} \psi(t, z)\,(z - \beta_i)$ wird daher null und $\psi(t, z)$ kann als einwertige Funktion von z für einen Wert $z = \beta_i$, für den sich nur die Riemannsche Fläche verzweigt, nicht unendlich werden.

Bildet man nun die Differenz

$$\Phi = \psi(t, z) - \sum_{i=1}^{R+Q} A_i \frac{f(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)\,(z - \beta_i)}, \tag{3}$$

wo die Summe über alle R Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ und die Q Unstetigkeitspunkte von σ zu erstrecken ist, so wird Φ als Funktion von z im Endlichen nicht mehr unstetig, weil die Abscissen β_i alle von einander verschieden sind, und für $z = \infty$ wie $\psi(t, z)$ zur $m$ten Ordnung unendlich. Φ ist daher als einwertige Funktion auch ganze rationale Funktion von z vom $m$ten Grad. Ihre Koefficienten müssen aber t bis zur $n - 1$ten Potenz erhalten, weil Φ eine ganze rationale Funktion von t vom $n - 1$ten Grade ist. Bezeichnet $g(\overset{n-1\,m}{t,\ z})$ diese Funktion, so erhält man aus (3)

$$\psi(t, z) = \sum_{i=1}^{R+Q} A_i \frac{f(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)\,(z - \beta_i)} + g(\overset{n-1\,m}{t,\ z}). \tag{4}$$

In Anbetracht der Voraussetzungen, unter welchen dieser Ausdruck abgeleitet wurde, gilt er für alle endlichen Werte von t und

für alle endlichen Werte von z, für welche nicht zwei Punkte der Riemannschen Fläche zusammenfallen.

Setzt man nun $t = x$, so erhält man für σ die Darstellung

$$\sigma = \sum_{i=1}^{R+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g(x, z). \qquad (5)$$

Es ist aber noch zu untersuchen, ob die durch (5) dargestellte Funktion σ in allen Punkten der Riemannschen Fläche die verlangten Eigenschaften besitzt.

2.

Irgend ein Glied $\frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)}$ der Summe in Gleichung (5) (Art. 1) geht für $x = \alpha_i$, $z = \beta_i$, wenn $f_n(x, z) = 0$ an dieser Stelle einen Doppel- oder Verzweigungspunkt besitzt, über in

$$\frac{(x - \alpha_i)^2 P(x)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} = \frac{x - \alpha_i}{z - \beta_i} P(x),$$

wo $P(x)$ für $x = \alpha_i$ nicht verschwindet. In einem Doppelpunkt α_i, β_i nimmt der Quotient $\frac{x - \alpha_i}{z - \beta_i}$ zwei verschiedene Werte an[1]), und in einem Verzweigungspunkt α_i, β_i wird $\frac{x - \alpha_i}{z - \beta_i}$ unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$[1]). Ist aber der Punkt α_i, β_i ein einfacher Punkt der Riemannschen Fläche, also weder Doppel- noch Verzweigungspunkt, so hat der Ausdruck $\frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)}$ die Form $\frac{P'(x)}{z - \beta_i}$, wo $P'(x)$ für $x = \alpha_i$ nicht verschwindet, und wird daher für $x = \alpha_i$, $z = \beta_i$ unendlich wie $\frac{1}{z - \beta_i}$.

Dagegen bleibt ein Glied $\frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)}$ in allen Punkten der Riemannschen Fläche, für welche entweder $z \neq \beta_i$ oder $x \neq \alpha_i$ ist, einwertig und endlich, wie leicht zu sehen ist.

Daraus folgt, daß die Funktion σ in allen R Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte annimmt und in Q Punkten zur 1. Ordnung unendlich wird, sonst aber im Endlichen überall endlich bleibt. Nach Voraussetzung soll aber σ nur in r Doppelpunkten zwei verschiedene Werte annehmen, weshalb in (5) alle

1) Vgl. die auf S. 6 u. 7 über $f_n(x, z) = 0$ gemachten Voraussetzungen.

den übrigen $R - r$ Doppelpunkten entsprechenden Glieder wegfallen müssen.

Statt (5) (Art. 1) erhält man daher

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g(x, z)^{n-1\,m}, \tag{1}$$

und diese Darstellung gilt für den ganzen im Endlichen gelegenen Teil der Riemannschen Fläche.

Nun ist noch das Verhalten der Funktion für $z = \infty$ zu untersuchen. Da $\frac{f(x, \beta_i)}{x - \alpha_i}$ ganze Funktion von x ist, so kann man die Funktion σ auf den Hauptnenner $R(z) = \prod_{i=1}^{r+Q} (z - \beta_i)$ vom Grade $r + Q = q$ in z bringen und erhält dann

$$\sigma = \frac{G(x, z)^{n-1\,q+m}}{R(z)}, \tag{2}$$

wenn $G(x, z)^{n-1\,q+m}$ eine ganze rationale Funktion in x und z vom Grade $n - 1$ bezw. $q + m$ ist. Aus (1) und (2) folgt die später zu benützende Identität

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} = \frac{G(x, z)^{n-1\,q+m} - R(z)\, g(x, z)^{n-1\,m}}{R(z)} \tag{3}$$

$$= \frac{g_{q+m-n+1}(z)\, x^{n-1} + g_{q+m-n+2}(z)\, x^{n-2} + \ldots + g_{q+m}(z)}{R(z)},$$

wo die g ganze Funktionen von z vom Grade $q + m$ sind.

Da σ für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung unendlich werden soll, so darf nach Gleichung (2) $G(x, z)$ für $z = \infty$ nur zur $q + m$ten Ordnung unendlich werden.

Beginnt man mit den Gliedern der höchsten Potenzen, so hat $G(x, z)$ folgende Form:

$$G = b_0 z^{q+m} x^{n-1} + b_1 z^{q+m+1} x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} z^{q+m+n-1}$$

$$+ b_n z^{q+m-1} x^{n-1} + \ldots .$$

$$= z^{q+m+n-1}\left(b_0 \left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} + b_1 \left(\frac{x}{z}\right)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\right) + \ldots$$

wo die b Konstante sind.

Damit G für $z = \infty$ nicht zur $q+m+n-1$ten Ordnung unendlich wird, wenn $q+m+n-1 > q+m$ ist, muß das Polynom $b_0\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} + b_1\left(\frac{x}{z}\right)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ für alle n Werte von $\frac{x}{z}$ verschwinden, welche sich aus $f_n(x, z) = 0$ für die Richtungen nach den n unendlich fernen Punkten berechnen. Dies ist aber nur möglich, wenn alle Konstanten $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ verschwinden. Denselben Schluß kann man für die Glieder machen, welche in x und z vom $q+m+n-2$ten Grade sind, und fährt man in dieser Weise fort, so sieht man, daß in $G(x, z)$ alle Glieder wegfallen müssen, welche in x und z homogen von höherem als dem $q+m$ten Grade sind.

Daher erhält man an Stelle von (2)

$$\sigma = \frac{G(x, z)^{q+m}}{R(z)} = \frac{g_{q+m-n+1}(z)\, x^{n-1} + g_{q+m-n+2}(z)\, x^{n-2} + \ldots + g_{q+m}(z)}{R(z)}, \quad (4)$$

wo die g ganze Funktionen von z vom Grad des Index sind.

Aus (1) und (4) folgt nun die Identität

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x-\alpha_i)(z-\beta_i)} + g^{n-1\,m}(x, z) = \frac{g_{q+m-n+1}(z)\, x^{n-1} + \ldots + g_{q+m}(z)}{R(z)}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x-\alpha_i)(z-\beta_i)} = \frac{g_{q+m-n+1}(z)\, x^{n-1} + \ldots + g_{q+m}(z) - R(z)\, g^{n-1\,m}(x, z)}{R(z)}. \quad (5)$$

Damit die linke Seite für $z = \infty$ zur gleichen Ordnung unendlich wird wie die rechte, müssen Beziehungen zwischen den Konstanten A_i bestehen. Man erhält dieselben, wenn man die Koefficienten der einzelnen Potenzen von x und z gleichsetzt. Zerlegt man zu diesem Zweck die rechte Seite in (5), als Funktion von z allein betrachtet, in Partialbrüche und vergleicht die entsprechenden Glieder, so ergibt sich

$$A_i \frac{f(x, \beta_i)}{x-\alpha_i} = \frac{g_{q+m-n+1}(\beta_i)\, x^{n-1} + g_{q+m-n+2}(\beta_i)\, x^{n-2} + \ldots + g_{q+m}(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \quad (6)$$

$$\text{für } i = 1, 2, \ldots . r+Q.$$

Um die linke Seite in (6) auf die Form einer ganzen Funktion in x zu bringen, braucht man mit der Bezeichnung

$$f_\mu = a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1} x + a_\mu$$

nur folgende Identitäten anzuschreiben:

$$\begin{array}{rl}
x f_{n-1}(x, \beta_i) = f_n(x, \beta_i) - a_n(\beta_i) & 1 \\
x f_{n-2}(x, \beta_i) = f_{n-1}(x, \beta_i) - a_{n-1}(\beta_i) & \alpha_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x f_{n-\nu-1}(x, \beta_i) = f_{n-\nu}(x, \beta_i) - a_{n-\nu}(\beta_i) & \alpha_i^{\nu} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x f_0 = f_1(x, \beta_i) - a_1(\beta_i) & \alpha_i^{n-1}
\end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Faktoren und Addition folgt hieraus

$$x \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu-1}(x, \beta_i) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu}(x, \beta_i) + f_n(x, \beta_i) + a_0 \alpha_i^n$$

$$- (a_0 \alpha_i^n + a_1(\beta_i)\, \alpha_i^{n-1} + \ldots + a_n(\beta_i))$$

$$= \alpha_i \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu-1}(x, \beta_i) + f_n(x, \beta_i),$$

weil der Klammerausdruck verschwindet.

Man erhält somit

$$(x - \alpha_i) \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu-1}(x, \beta_i) = f_n(x, \beta_i)$$

$$\frac{f_n(x, \beta_i)}{x - \alpha_i} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu-1}(x, \beta_i).$$

Damit geht Gleichung (6) über in

$$A_i \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_i^{\nu} f_{n-\nu-1}(x, \beta_i)$$

$$= \frac{1}{R'(\beta_i)} \left(g_{q+m-n+1}(\beta_i)\, x^{n-1} + g_{q+m-n+2}(\beta_i)\, x^{n-2} + \ldots + g_{q+m}(\beta_i) \right)$$

für $i = 1, 2, \ldots\ldots r + Q$.

Vergleicht man jetzt die Koefficienten der entsprechenden Potenzen von x, so findet man die n Gleichungen

$$(1) \quad A_i \left(a_0 \alpha_i^{n-1} + a_1(\beta_i) \alpha_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(\beta_i) \right) = \frac{1}{R'(\beta_i)}\, g_{q+m}(\beta_i)$$

$$(2) \quad A_i \left(a_0 \alpha_i^{n-2} + a_1(\beta_i) \alpha_i^{n-3} + \ldots + a_{n-2}(\beta_i) \right) = \frac{1}{R'(\beta_i)}\, g_{q+m-1}(\beta_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots

Nun ist aber für jede der Funktionen g_k ($k = q+m-n+1$ bis $q+m$)

$$\frac{g_k(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{r+Q} \frac{g_k(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \frac{1}{z-\beta_i}.$$

Bildet man daher diese Summe für jede einzelne der Gleichungen (7), so erhält man

$$(1)\quad \frac{g_{q+m}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \left(a_0 \alpha_i^{n-1} + a_1(\beta_i)\alpha_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(\beta_i)\right) \frac{1}{z-\beta_i}$$

$$(2)\quad \frac{g_{q+m-1}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \left(a_0 \alpha_i^{n-2} + a_1(\beta_i)\alpha_i^{n-3} + \ldots + a_{n-2}(\beta_i)\right) \frac{1}{z-\beta_i}$$

. . . . . (8)

$$(n-1)\quad \frac{g_{q+m-n+2}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \left(a_0 \alpha_i + a_1(\beta_i)\right) \frac{1}{z-\beta_i}$$

$$(n)\quad \frac{g_{q+m-n+1}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i a_0 \frac{1}{z-\beta_i}.$$

Aus diesen n Gleichungen lassen sich die gesuchten Beziehungen ableiten, wenn man noch $\frac{1}{z-\beta_i}$ in eine Reihe für $z=\infty$ entwickelt. Man geht aus von der $n$ten Gleichung in (8). In dieser steht links eine Funktion, welche für $z=\infty$ zur $n-m-1$ten Ordnung null wird; damit auch die rechte Seite für $z=\infty$ zur gleichen Ordnung verschwindet, müssen folgende Beziehungen erfüllt sein:

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \mu = 0, 1, \ldots . n-m-3.$$

Mit Benützung dieser Gleichungen folgen aus der $n-1$ten Gleichung in (8) weitere Beziehungen derselben Art, welche α_i enthalten und in β_i bis zur $n-m-4$ten Potenz ansteigen. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man schließlich zu folgendem System von $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda+\mu = 0, 1. \ldots . n-m-3 \text{ oder ausgeführt:}$$

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + \ldots + A_{r+Q} = 0\\
&A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{r+Q}\alpha_{r+Q} = 0\\
&A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + \ldots + A_{r+Q}\beta_{r+Q} = 0 \qquad (9)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1\alpha_1^{n-m-3} + \ldots + A_{r+Q}\alpha_{r+Q}^{n-m-3} = 0.
\end{aligned}$$

Für $n - m - 3 < 0$ erhält man keine Beziehung zwischen den Konstanten A_i.

Die ganze Ableitung gilt auch dann, wenn m negativ ist, d. h. wenn die Funktion σ für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung null werden soll. Man hat in diesem Fall nur $-m$ statt m zu setzen. Da aber in den Gleichungen (8) α_i nur bis zur $n-1$ten Potenz vorkommt, so fehlen in (9) alle die Gleichungen, welche α_i in einer höheren als der $n-1$ten Potenz enthalten würden. Die Zahl derselben ist aber $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Macht man ganz dieselbe Entwicklung für die Identität (3) (S. 11), so erhält man der Reihe nach wieder die Gleichungen (5), (6), (7) und (8). Sind nun umgekehrt die Gleichungen (9) erfüllt, so werden die Funktionen g in (8) höchstens vom Grad ihrer Indices und es folgt daraus nach Gleichung (3), daß die Summe

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

für sich allein für $z = \infty$ nur zur $m$ten Ordnung unendlich wird. Damit also σ ebenfalls nur zur $m$ten Ordnung unendlich wird, darf in (1) (S. 11) die ganze rationale Funktion $g(x, z)$ in x und z nur vom $m$ten Grade werden[1]). Der Ausdruck (1) für σ nimmt daher folgende Form an:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g\,\overline{(x, z)}, \qquad (10)$$

wo in der ganzen Funktion g vom Grade m x nur bis zur $n-1$ten Potenz enthalten ist.

Man kommt somit zu folgendem Ergebnis:

Ist $f_n(x, z) = 0$ eine irreduktible oder reduktible Gleichung $n$ter Ordnung zwischen zwei Variablen x und z mit den in Art. 1 angegebenen Eigenschaften, so ist auf der zugehörigen Riemannschen Fläche jede Funktion σ, welche in r Doppelpunkten zwei verschiedene Werte, in allen andern Doppelpunkten nur einen Wert annimmt, in Q im Endlichen gelegenen Punkten zur 1. Ordnung und für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung unendlich wird, sonst aber überall stetig bleibt, von der Form I

1) Beweis ebenso wie für die Funktion G (S. 12).

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g^{(m)}(x, z), \tag{11}$$

wo α_i, β_i die Koordinaten der genannten Punkte sind und $g^{(m)}(x, z)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade m ist, welche x höchstens bis zur $n-1$ten Potenz enthält.

Zwischen den Konstanten A_i bestehen für $n - m - 3 \geqq 0$ die $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots . n - m - 3. \tag{12}$$

Soll dagegen die Funktion σ für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung null werden ($m \geqq 1$), sonst aber dieselben Eigenschaften haben wie oben, so hat sie die Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r+Q} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} \tag{13}$$

und zwischen den Konstanten A_i bestehen die $\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{r+Q} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots . n + m - 3 \text{ und } \lambda \leqq n - 1. \tag{14}$$

Umgekehrt wird jede Funktion σ von der Form (11) bzw. (13) in Q im Endlichen gelegenen Punkten zur 1. Ordnung unendlich, nimmt in r Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte an und wird für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung unendlich bzw. null, wenn die zugehörigen Beziehungen (12) bzw. (14) zwischen den Konstanten A_i erfüllt sind.

3.

Die algebraischen Raumkurven $n$ter Ordnung, welche hier behandelt werden, können irreduktibel oder reduktibel sein, dürfen aber jede irreduktible Teilkurve nur einfach enthalten. Auch sollen sie nur einfache wirkliche Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzen. Sind x, y, z, t die vier homogenen Raumkoordinaten, so hat ein mit $\frac{\lambda}{\mu}$ veränderlicher Kegel durch die Raumkurve, dessen

Spitze auf der „Hauptkante“ $z = t = 0$ des Koordinatentetraeders gelegen ist, die Form [1])

$$\begin{aligned} 0 = \Omega(\lambda, \mu, \omega, z, t) &= a_k \omega^m \\ &+ (a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu)\omega^{m-1} \\ &+ (a_{k+2}\lambda^2 + b_{k+2}\lambda\mu + c_{k+2}\mu^2)\omega^{m-2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_n\lambda^m + b_n\lambda^{m-1}\mu + c_n\lambda^{m-2}\mu^2 + \ldots + q_n\mu^m), \end{aligned}$$

wo $m + k = n$ und $\omega = \lambda x + \mu y$ ist.

Die $a, b, c \ldots q$ sind ganze rationale in z und t homogene Funktionen vom Grad des Index. Setzt man $\omega = \lambda x + \mu y$ in die Gleichung ein, so müssen die Koordinaten aller Punkte der Raumkurve die Gleichung befriedigen, was auch $\frac{\lambda}{\mu}$ sein mag, d. h. die Koefficienten der verschiedenen Potenzen von $\frac{\lambda}{\mu}$ müssen einzeln verschwinden. Man erhält so eine Reihe spezieller Flächen, die durch die Raumkurve gehen, von welchen drei für das Folgende von Wichtigkeit sind:

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

$$A'y + B = 0 \text{ oder } y = -\frac{B}{A'}, \qquad (2)$$

$$Y = a_k y^m + b_{k+1} y^{m+1} + \ldots + q_n = 0. \qquad (3)$$

Hier ist $A' = \frac{\partial A}{\partial x}$ und $B = b_{k+1} x^{m-1} + b_{k+2} x^{m-2} + \ldots + b_n$.

Die Hauptkante schneidet die Raumkurve in k Punkten, und die Tangentialebenen der Raumkurve in diesen k Punkten durch die Hauptkante $z = t = 0$ werden durch die Gleichung $a_k = 0$ dargestellt. Aus $a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu = 0$ erhält man k Werte $\frac{\lambda}{\mu}$, wenn man die k aus $a_k = 0$ berechneten Werte von $\frac{z}{t}$ einsetzt, und diese k Werte $\frac{\lambda}{\mu}$ bestimmen k Ebenen $\lambda x + \mu y = 0$ durch die Schnittpunkte der Hauptkante mit der Raumkurve [2]).

Die Gleichung $A = 0$ des die Raumkurve vom Punkt $x = z = t = 0$ aus projicierenden Kegels ist zugleich die Gleichung der Projektionskurve der Raumkurve von diesem Punkt aus auf die Ebene $y = 0$,

1) Math. Ann. Bd. 64, S. 289 ff.
2) Math. Ann. Bd. 64, S. 294.

geschrieben in drei homogenen Koordinaten x, z, t. Nach Gleichung (1), (2) und (3) ist die Koordinate y eine algebraische Funktion der Riemannschen Verzweigungsfläche, welche der Gleichung $A = 0$ entspricht.

Um nun die in Art. 2 abgeleitete Darstellung einer algebraischen Funktion auf y anwenden zu können, ist zu untersuchen, ob durch passende Wahl des Koordinatensystems erreicht werden kann, daß die Kurve $A = 0$ alle die Eigenschaften besitzt, welche von der Kurve $f_n(x, z) = 0$ des genannten Artikels verlangt sind.

Zum Projektionszentrum $x = z = t = 0$ wählt man einen beliebigen Punkt des Raums, welcher nicht auf der Raumkurve und auf keiner der folgenden Flächen gelegen ist: 1. nicht auf der Tangentenfläche der Raumkurve, damit die Projektionskurve $A = 0$ keine Spitze erhält; 2. nicht auf der Umhüllungsfläche der Ebenen, welche die Raumkurve doppelt berühren, damit $A = 0$ keinen Selbstberührungspunkt hat und 3. nicht auf der Fläche, welche die mehr als zweifachen Sehnen der Raumkurve enthält. Dann treten in der Projektionskurve nur einfache Doppelpunkte auf, weil die Raumkurve nach Voraussetzung nur einfache wirkliche Doppelpunkte besitzt. Nach Festlegung des Projektionszentrums kann die Projektionsebene $y = 0$ beliebig angenommen werden. Dann wählt man die Ebene $t = 0$ so, daß die Gerade $y = t = 0$ die Projektionskurve in lauter getrennten Punkten schneidet. Auf dieser Geraden muß der Punkt $y = z = t = 0$ liegen, bei dessen Wahl nur die Punkte auszuschließen sind, durch welche eine Tangente in einem Doppelpunkt von $A = 0$ geht, und welche mit zwei Doppelpunkten von $A = 0$ auf einer Geraden liegen. Da für die Lage der Ebenen $t = 0$ und $z = 0$ noch unendlich viele Möglichkeiten vorhanden sind, so kann auch noch bewirkt werden, daß die Hauptkante $z = t = 0$ die Raumkurve nicht schneidet. Die Ebene $x = 0$ endlich kann beliebig angenommen werden.

Geht man nun zu gewöhnlichen kartesischen Koordinaten über, indem man $t = 1$ setzt, so ist durch diese Wahl des Koordinatensystems erreicht, daß die Projektion der Raumkurve vom Punkt $x = z = t = 0$ aus auf die Ebene $y = 0$, welche nun $f_n(x, z) = 0$ heißen soll, nur einfache Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzt, daß die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten und die Abscissen z der Doppelpunkte alle von einander verschieden sind und daß kein Verzweigungspunkt mit einem Doppelpunkt zusammenfällt. Das Polynom $f_n(x, z)$ ist irreduktibel oder zerfällt in

lauter verschiedene irreduktible Faktoren, weil nach Voraussetzung die Raumkurve jede irreduktible Teilkurve nur einfach enthält. Weil ferner die Hauptkante die Raumkurve nicht schneidet, so ist $f_n(x, z)$ von der Form

$$f_n(x, z) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0, \qquad (4)$$

wo a_0 nicht verschwindet.

Ebenso erhält man an Stelle von (3)

$$Y = a_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots\ldots + q_n = 0, \qquad (5)$$

wo die $a, b, \ldots . q$ ganze Funktionen von z vom Grad des Index sind.

Auf der zu $f_n(x, z) = 0$ gehörigen Riemannschen Fläche bleibt die algebraische Funktion y nach (5) im Endlichen überall endlich und wird für $z = \infty$ zur 1. Ordnung unendlich. Außerdem nimmt die Koordinate y ihrer Bedeutung nach in den r Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind, zwei verschiedene den beiden Zweigen von $f_n(x, z) = 0$ entsprechende Werte, in allen anderen Doppelpunkten aber nur einen Wert an. Ebenso sieht man, daß jede ganze rationale Funktion $F_m(x, y, z)$ vom $m$ten Grad in x, y und z eine algebraische Funktion der Riemannschen Fläche ist, welche für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung unendlich wird, sonst überall endlich bleibt und in den erwähnten r Doppelpunkten im allgemeinen zwei verschiedene Werte annimmt. Da jedem Punkt der Kurve $f_n(x, z) = 0$ eindeutig ein Punkt der Raumkurve entspricht, so sind die Werte der Funktion $F_m(x, y, z)$ den einzelnen Punkten der Raumkurve eindeutig zugeordnet.

Alle diese Funktionen $F_m(x, y, z)$ lassen sich daher in der in Art. 2 abgeleiteten Weise darstellen und man erhält den Satz[1]):

Ist $f_n(x, z) = 0$ die Projektionskurve einer Raumkurve $n$ter II
Ordnung von einem beliebigen nicht auf ihr gelegenen Punkt des Raums auf eine Ebene, so kann jede ganze rationale Funktion vom $m$ten Grad in x, y, z $F_m(x, y, z)$ als Funktion der zugehörigen Riemannschen Fläche auf die Form gebracht werden:

$$F_m(x, y, z) = \sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g(\overset{m}{x}, \overset{m}{z}), \qquad (6)$$

wo zwischen den Konstanten A_i für $n - m - 3 \geqq 0$ folgende

1) Der Satz folgt aus Satz I, S. 15, wenn man $Q = 0$ setzt.

$\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ Beziehungen bestehen:

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots . n - m - 3.$$

Irgend eine der Konstanten A_i verschwindet dann und nur dann, wenn $F_m(x, y, z)$ in dem betreffenden Doppelpunkt α_i, β_i zwei gleiche Werte annimmt.

4.

Aus dem Satz II (S. 19) lassen sich für $n - m - 3 \geqq 0$ Beziehungen ableiten zwischen der Zahl der linear unabhängigen Flächen $m$ter Ordnung, welche durch eine Raumkurve gehen, und der Zahl der Bedingungen, welche eine ebene Kurve $n - m - 3$ter Ordnung in der Projektionsebene zu erfüllen hat, damit sie durch alle r Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$ geht, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind. Im folgenden sind unter den r Doppelpunkten der Kurve $f_n(x, z) = 0$, welcher die Riemannsche Fläche entspricht, immer nur die genannten r Doppelpunkte zu verstehen.

In Satz II handelt es sich um Funktionen von der Form

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g^{m}(x, z)\ ^{1}), \qquad (1)$$

deren Konstanten A_i für $n - m - 3 \geqq 0$ folgende $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ Gleichungen befriedigen:

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots . n - m - 3. \qquad (2)$$

Daß eine solche Funktion für $n - m - 3 \geqq 0$, $r < \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ wirklich vorhanden ist, ohne daß alle Konstanten A_i verschwinden, folgt z. B. daraus, daß die Funktion y^m, welche in allen r Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte annimmt, diese Form haben muß. Daraus folgt weiter, daß für $r \leq \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ nicht alle Gleichungen in (2) von einander unabhängig sein können.

Nimmt man für $n - m - 3 \geqq 0$ an, es seien ρ Gleichungen

1) In $g^{m}(x, z)$ ist x höchstens bis zur $n - 1$ten Potenz enthalten.

in (2) linear unabhängig, wo $\rho \leqq \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ ist, so muß $\rho < r$ sein, damit die Gleichungen (2) für Werte der Konstanten A_i befriedigt werden können, welche nicht alle verschwinden. Die übrigen $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} - \rho$ Gleichungen sind dann eine Folge der ρ linear unabhängigen Gleichungen; die Matrix der Koefficienten der A_i

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots\ldots & \beta_r \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \beta_1^{n-m-3} & \beta_2^{n-m-3} & \ldots & \beta_r^{n-m-3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{n-m-3} & \alpha_2^{n-m-3} & \ldots & \alpha_r^{n-m-3} \end{array} \right\| \tag{3}$$

ist vom Range ρ und die Funktion (1) hat für $n - m - 3 \geqq 0$ genau

$$q'_m = r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \rho \tag{4}$$

homogene willkürliche Konstante, da $g^{(m)}(x, z)$ als ganze rationale Funktion vom $m$ten Grad in x und z $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ homogene Konstante hat, wenn $m \leqq n-1$ ist[1]), eine Ungleichung, welche durch die Voraussetzung $n - m - 3 \geqq 0$ schon erfüllt ist.

Ist aber $n - m - 3 < 0$, so fallen die Gleichungen (2) weg, und die Funktion (1) hat

$$q'_m = r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} \tag{5}$$

homogene willkürliche Konstante[1]).

Da die Funktion nach Satz I (Umkehrung) wegen der zugehörigen Gleichungen (2) für jeden der n unendlich fernen Punkte von $f_n(x, z) = 0$ zur $m$ten Ordnung, also im ganzen mnmal zur 1. Ordnung unendlich wird, so muß sie nach einem Satz der Funktionentheorie mindestens[2]) mn Nullpunkte auf der Riemannschen Fläche haben. Von diesen Nullpunkten können $q'_m - 1$ willkürlich

1) Vgl. die Definition der Funktion $g^{(m)}(x, z)$ in Satz I (S. 15).

2) Die Funktion kann auch mehr als mn Nullpunkte haben, wenn die Riemannsche Fläche zerfällt.

angenommen werden, ohne daß die Funktion auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwindet. Denn die q'_m linearen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g\overset{m}{(x, z)} = 0,$$

geschrieben in den Koordinaten x, z der $q'_m - 1$ Punkte, welche aussagen, daß die Funktion in $q'_m - 1$ willkürlich gewählten Punkten null werden soll, können durch Werte der q'_m homogenen Konstanten befriedigt werden, welche nicht alle null sind, weil die Zahl der Gleichungen um 1 kleiner ist als die Zahl der Unbekannten [1]). Man hat also eine Funktion

$$\sum_{i=1}^{r} A'_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g'\overset{m}{(x, z)} \tag{6}$$

von der Form (1), in welcher nicht alle Konstanten null sind und welche in $q'_m - 1$ willkürlich gewählten Punkten verschwindet. Die so bestimmte Funktion (6) kann aber nicht auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden. Denn angenommen, die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} A'_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g'\overset{m}{(x, z)} = 0$$

wäre für die ganze Riemannsche Fläche erfüllt, und es wären nicht alle Konstanten A'_i null, dann würde die Funktion (6) in mindestens einem der Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte annehmen (s. Art. 2, S. 10) und könnte daher nicht überall null sein.

Wären aber alle Konstanten A'_i null, so hätte man eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion $g'\overset{m}{(x, z)}$ vom $m$ten Grad in x und z, welche auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden würde. Dann müßte aber das Polynom $g'\overset{m}{(x, z)}\, f_n(x, z)$ als Faktor enthalten, was unmöglich ist, da $g'\overset{m}{(x, z)}\, x$ nur bis zur $n-1$ten Potenz enthält (s. S. 20, Anmerk.), während in $f_n(x, z)$ nach Voraussetzung das Glied mit der Potenz x^n wirklich vorhanden ist.

Die ausgesprochene Behauptung [2]) ist damit bewiesen.

Wenn dagegen die Funktion (1) in q'_m willkürlich angenommenen Punkten der Riemannschen Fläche verschwindet, dann muß sie not-

1) Pascal, Repertorium d. höh. Math. Bd. I, S. 77.
2) S. 22 oben.

wendig identisch verschwinden. Denn in diesem Fall ist die Zahl q_m der Gleichungen, welche aussagen, daß die Funktion (1) in q'_m willkürlich gewählten Punkten verschwindet, gleich der Zahl q'_m der homogenen willkürlichen Konstanten der Funktion; diese q'_m Gleichungen sind aber linear unabhängig, wenn die q'_m Nullpunkte willkürlich angenommen sind, und können daher nur befriedigt werden, wenn alle q'_m Konstanten null sind.

Die Funktion $F_m(x, y, z)$ in (6) (Art. 3) wird in den n unendlich fernen Punkten von $f_n(x, z) = 0$ zur $m$ten Ordnung unendlich und muß daher in mn oder mehr Punkten der Riemannschen Fläche zur 1. Ordnung null werden. Die Funktion kann mehr als mn Nullpunkte haben, wenn die Riemannsche Fläche zerfällt. Den Nullpunkten der Funktion $F_m(x, y, z)$ auf der Riemannschen Fläche entsprechen die Schnittpunkte der Fläche $m$ter Ordnung $F_m(x, y, z) = 0$ mit der Raumkurve und umgekehrt.

Es sei nun k_m die Höchstzahl der linear unabhängigen Flächen $m$ter Ordnung, welche alle die Raumkurve enthalten, so daß die allgemeinste Fläche $m$ter Ordnung, welche durch die Raumkurve geht, noch $k_m - 1$ Bedingungen erfüllen kann. Ist ferner q_m die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen, welche eine allgemeine Fläche $m$ter Ordnung zu erfüllen hat, um die Raumkurve ganz zu enthalten, so besteht zwischen diesen beiden Zahlen die Beziehung

$$k_m + q_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}. \qquad (7)$$

Denn die Gleichung einer allgemeinen Fläche $m$ter Ordnung hat $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ homogene Konstante, über welche man so verfügen kann, daß die Fläche durch q_m willkürlich auf der Raumkurve angenommene Punkte geht. Die so bestimmte Fläche ist der Bedeutung von q_m nach die allgemeinste Fläche $m$ter Ordnung, welche die Raumkurve ganz enthält und kann noch $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - q_m - 1$ Bedingungen erfüllen, woraus die Gleichung (7) folgt.

Aus der Definition von q_m folgt ferner, daß für eine allgemeine Fläche $m$ter Ordnung $q_m - 1$ Schnittpunkte mit der Raumkurve willkürlich angenommen werden können, ohne daß sie die Raumkurve ganz enthält. Dies gilt offenbar auch, wenn $k_m = 0$ ist, d. h. wenn keine Fläche $m$ter Ordnung durch die Raumkurve geht. Es

gibt also eine Funktion $F_m(x, y, z)$ der Riemannschen Fläche, welche in $q_m - 1$ willkürlich angenommenen Punkten null wird, ohne auf der ganzen Riemannschen Fläche zu verschwinden. Dasselbe gilt für die Funktion von der Form (1), welche ihr nach Satz II entspricht. Wäre nun $q_m - 1 > q'_m - 1$, so hätte man eine Funktion von der Form (1), welche in mindestens q'_m willkürlich gewählten Punkten null wäre, ohne identisch zu verschwinden. Das ist aber unmöglich, wie oben (S. 23) bewiesen wurde.

Man erhält daher

$$q_m \leqq q'_m, \tag{8}$$

und daraus folgt nach (4) für $n - m - 3 \geqq 3$ die Ungleichung

$$\rho \leqq r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m. \tag{9}$$

Von den Gleichungen (2) sind also höchstens

$r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ linear unabhängig.

Solange $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m \geqq \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$

ist, ist die Ungleichung (9) immer erfüllt, da

$$\rho \leqq \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} \text{ ist.}$$

Ist aber $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m < \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$,

so folgt aus (9) $\rho < \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$, und es bestehen Beziehungen zwischen den Koordinaten der r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$.

Stellt man nämlich die Bedingungen dafür auf, daß eine allgemeine Kurve $n - m - 3$ter Ordnung

$$c_0\, x^{n-m-3} + c_1\, x^{n-m-4}\, z + c_2\, x^{n-m-5}\, z^2 + \ldots\ldots = 0$$

durch die r Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$ gehen soll, so erhält man folgende r Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&c_0\, \alpha_1^{n-m-3} + c_1\, \alpha_1^{n-m-4}\, \beta_1 + \ldots\ldots = 0\\
&c_0\, \alpha_2^{n-m-3} + c_1\, \alpha_2^{n-m-4}\, \beta_2 + \ldots\ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_0\, \alpha_r^{n-m-3} + c_1\, \alpha_r^{n-m-4}\, \beta_r + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Matrix der Koefficienten der Konstanten c ist dieselbe wie die Matrix (3), nur mit Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen, und ist daher ebenfalls vom Range ρ. Daraus folgt aber, daß auch im System (10) genau ρ Gleichungen linear unabhängig und alle übrigen eine Folge dieser ρ Gleichungen sind. Eine allgemeine Kurve $n - m -$ 3ter Ordnung hat daher ρ Bedingungen zu erfüllen, um durch alle r Doppelpunkte von $f_n(x, x) = 0$ zu gehen, welche scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entsprechen, und es gibt $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} - \rho$ linear unabhängige Kurven $n - m -$ 3ter Ordnung durch die genannten Doppelpunkte. Da $\rho \leqq r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ ist, so ist damit folgender Satz bewiesen:

III Ist q_m die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen, welche eine allgemeine Fläche $m$ter Ordnung zu erfüllen hat, um eine Raumkurve ganz zu enthalten, so stellen die r Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind, für die adjungierten Kurven $n - m -$ 3ter Ordnung höchstens $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ Bedingungen dar $(n - m - 3 \geqq 0)$.

Mit Benützung der Gleichung (7) läßt sich der Satz auch so aussprechen:

IIIa Gibt es k_m linear unabhängige Flächen $m$ter Ordnung, welche alle durch die Raumkurve gehen, so stellen die genannten r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ für die adjungierten Kurven $n - m -$ 3ter Ordnung höchstens $r - \left(\frac{m(m+1)(m+2)}{6} - k_m\right)$ Bedingungen dar $(n - m - 3 \geqq 0)$ [1].

5.

In einem besonderen Fall läßt sich der Satz III (Art. 4) noch enger fassen, und zwar dann, wenn die Raumkurve nicht zerfällt und eine Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung durch die Raumkurve geht.

Wenn die Raumkurve nicht zerfällt, so ist auch ihre Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$ von einem beliebigen Punkt des Raumes aus

1) Nöther, Zur Grundlegung d. Th. d. alg. R.-K. S. 25.

irreduktibel. Unter dieser Voraussetzung kann man annehmen, daß eine beliebige bestimmte Funktion $F_m(x, y, z)$, welche nicht in allen Punkten der Riemannschen Fläche verschwindet, in allen r Doppelpunkten, welche den r scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entsprechen, wirklich zwei verschiedene Werte annimmt. Weil nämlich die Funktion $F_m(x, y, z)$ nach einem Satz der Funktionentheorie denselben Wert in mn Punkten der Riemannschen Fläche bezw. der Raumkurve annimmt, wenn diese nicht zerfällt, so erfüllen die Verbindungslinien dieser mn Punkte der Raumkurve eine Fläche. Liegt aber das Projektionszentrum, das abgesehen von den in Art. 3 angegebenen Beschränkungen willkürlich gewählt werden kann, nicht auf dieser Fläche, so nimmt die Funktion $F_m(x, y, z)$ in den beiden Punkten, in denen eine zweifache Sehne der Raumkurve durch das Projektionszentrum die Raumkurve schneidet, und damit in den r Doppelpunkten der Riemannschen Fläche zwei verschiedene Werte an.

Ist $F'_m(x, y, z) = 0$ die allgemeinste Fläche $m$ter Ordnung, welche durch $q_m - 1$ willkürlich gewählte Punkte der Raumkurve geht, und ist letztere irreduktibel, so kann die Funktion $F'_m(x, y, z)$ nicht auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden [1]) und muß daher eine Funktion $G_m(x, y, z)$ enthalten, welche in mn Punkten der Riemannschen Fläche null wird, ohne überall zu verschwinden, und welche daher bei willkürlicher Wahl des Projektionszentrums, wie soeben bewiesen wurde, in allen r Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$. welche den r scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entsprechen, zwei verschiedene Werte annimmt.

Nun bestimme man $m+1$ Gerade $H_{m+1}(x, z) = 0$ in der Projektionsebene $y = 0$ derart, daß sie $f_n(x, z) = 0$ in lauter nicht zusammenfallenden, im Endlichen gelegenen Punkten schneiden, deren Abscissen alle von einander verschieden sind, und daß auf der Riemannschen Fläche kein Nullpunkt der Funktion $H_{m+1}(x, z)$ mit einem der mn Nullpunkte von $G_m(x, y, z)$ zusammenfällt. Dann nimmt die Funktion $\frac{G_m(x, y, z)}{H_{m+1}(x, z)}$ in allen r Doppelpunkten der Riemannschen Fläche auch wirklich zwei verschiedene endliche Werte an und wird in allen $(m+1)n$ Nullpunkten von $H_{m+1}(x, z)$ wirklich zur ersten Ordnung unendlich.

Im allgemeinen nimmt die Funktion $\frac{F'_m(x, y, z)}{H_{m+1}(x, z)}$ in den r Dop-

1) Dies folgt aus der Bedeutung der Zahl q_m, s. S. 23.

pelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte an, wird im Endlichen in den $(m+1)n$ Nullpunkten von $H_{m+1}(x, z)$ zur 1. Ordnung unendlich und für $z = \infty$ zur 1. Ordnung null. Sie hat daher nach Satz I folgende Form (für $Q = (m+1)n$):

$$\sum_{i=1}^{r+(m+1)n} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x-\alpha_i)(z-\beta_i)}, \tag{1}$$

wo die Konstanten A_i folgende $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen befriedigen:

$$\sum_{i=1}^{r+(m+1)n} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots n-2. \tag{2}$$

Da die Funktion $F'_m(x, y, z)\, G_m(x, y, z)$ enthält, so müssen in (1) auch alle $r+(m+1)n$ Glieder wirklich auftreten.

Sind von den Gleichungen (2) ρ' linear unabhängig $\left(\rho' \leqq \frac{n(n-1)}{2}\right)$, so kann man schließen[1]), daß die r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ zusammen mit den $(m+1)n$ Schnittpunkten von $H_{m+1}(x, z) = 0$ mit $f_n(x, z) = 0$ für eine allgemeine Kurve $n-2$ter Ordnung ρ' Bedingungen darstellen. Durch die genannten Punkte gibt es somit $\frac{n(n-1)}{2} - \rho'$ linear unabhängige Kurven $n-2$ter Ordnung. Jede dieser Kurven muß aber die $m+1$ Geraden $H_{m+1}(x, z) = 0$ enthalten, weil sie jede derselben in mehr als $n-2$ Punkten schneidet und es folgt daraus für $n-m-3 \geqq 0$, daß $\frac{n(n-1)}{2} - \rho'$ linear unabhängige Kurven $n-m-3$ter Ordnung durch die r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ gehen. Diese Zahl ist aber auch $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} - \rho$[2]) und daraus ergibt sich für $n-m-3 > 0$ die Beziehung

$$\rho' = \rho + (m+1)n - \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \tag{3}$$

Ist aber $n-m-3 < 0$, so ist es unmöglich, daß eine Kurve $n-2$ter Ordnung $m+1$ Gerade enthält. Daraus folgt für $n-m-3 < 0$ $\frac{n(n-1)}{2} - \rho' \leqq 0$, und da $\rho' \leqq \frac{n(n-1)}{2}$ ist,

$$\rho' = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{4}$$

1) Vgl. den entsprechenden Schluß S. 25.

2) S. S. 25.

Die allgemeinste Funktion der Form (1) mit den Gleichungen (2) hat daher $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - p$ für $n - m - 3 \geqq 0$ bezw. $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$ für $n - m - 3 < 0$ homogene willkürliche Konstante. Dies ist aber genau die Zahl q'_m (vgl. die Gleichungen (4) und (5) S. 21).

Von den Nullpunkten der allgemeinsten Funktion der Form (1) können $q'_m - 1$ willkürlich angenommen werden, ohne daß sie auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwindet.

Denn man kann die q_m willkürlichen Konstanten so bestimmen, daß die Funktion in $q'_m - 1$ willkürlich gewählten Punkten verschwindet, ohne daß die Konstanten alle null sind [1]).

Wäre nun die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r+(m+1)n} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} = 0 \qquad (5)$$

für alle Punkte der Riemannschen Fläche erfüllt, ohne daß alle Konstanten A_i verschwinden, so würde die linke Seite von (5) entweder in mindestens einem Doppelpunkt von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte annehmen oder in mindestens einem der Nullpunkte von $H_{m+1}(x, z)$ zur 1. Ordnung unendlich werden [2]), könnte also nicht auf der ganzen Riemannschen Fläche null sein. Es folgt daraus auch, daß die Gleichung (5) nur dann für alle Punkte der Riemannschen Fläche erfüllt sein kann, wenn die linke Seite identisch verschwindet.

Weil die Raumkurve nach Voraussetzung auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt, so kann man über die Konstanten der Fläche $F_m(x, y, z) = 0$ jedenfalls noch so verfügen, daß sie durch einen weiteren willkürlichen Punkt der Raumkurve geht. Die Fläche $F'_m(x, y, z) = 0$ schneidet dann die Raumkurve in q_m willkürlich gewählten Punkten und muß sie daher ganz enthalten, wie aus der Definition der Zahl q_m folgt (Art. 4, S. 23). Deshalb muß die der Funktion $\frac{F'_m(x, y, z)}{H_{m+1}(x, z)}$ entsprechende Funktion (1) auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden, weil sie in einem beliebigen weiteren Punkt derselben null wird. Diese identisch verschwindende Funktion kann daher als Grenzfall der Funk-

1) Vgl. den entsprechenden Beweis S. 22.

2) S. Umkehrung von Satz I.

tion (1) angesehen werden, in welcher die Höchstzahl von $r + (m+1)n$ Gliedern wirklich vorhanden ist. Es müßte daher eine ganz allgemeine Funktion von der Form (1) auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden, weil sie in q_m willkürlich gewählten Punkten null wird. Dies führt zu einem Widerspruch, wenn $q_m < q'_m - 1$ ist, weil für eine allgemeine Funktion der Form (1) $q'_m - 1$ Nullpunkte auf der Riemannschen Fläche willkürlich angenommen werden können, ohne daß sie überall verschwindet.

Man erhält somit die Ungleichung

$$q_m > q'_m - 1 \text{ oder } q_m \geq q'_m.$$

In Verbindung mit Gleichung (8) (S. 24) folgt hieraus

$$q_m = q'_m \tag{6}$$

oder nach Gleichung (4) (S. 21) für $n - m - 3 \geq 0$

$$\rho = r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m. \tag{7}$$

Für zerfallende Raumkurven könnte man diesen Schluß nicht machen. Denn es kann der Fall eintreten, daß jede Fläche $m$ter Ordnung $F'_m(x, y, z) = 0$, welche die Raumkurve in $q'_m - 1$ willkürlich gewählten Punkten schneidet, irgend eine Teilkurve ganz enthält. Die Funktion $F'_m(x, y, z)$ würde dann auf demjenigen Teil der Riemannschen Fläche, welcher dieser Teilkurve entspricht, verschwinden. Dann würde aber die Funktion $\frac{F'_m(x, y, z)}{H_{m+1}(x, z)}$ auf diesem Teil der Riemannschen Fläche sowohl in allen Doppelpunkten nur einen Wert null annehmen als auch in den Nullpunkten von $H_{m+1}(x, z)$ endlich bleiben, und zwar unabhängig davon, wie das Projektionszentrum und die Funktion $H_{m+1}(x, z)$ gewählt sind. Die Funktion (1) hätte dann weniger als $r + (m+1)n$ Glieder, während zur Ableitung der Gleichung (6) notwendig ist, daß in (1) die Höchstzahl von $r + (m+1)n$ Gliedern wirklich auftritt. In Worten lautet die Gleichung (7):

Liegt eine nicht zerfallende Raumkurve auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung, so sind von den Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots . n - m - 3$$

genau $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ linear unabhängig.

Dann ist aber die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots\dots & \beta_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-m-3} & \alpha_2^{n-m-3} & \dots & \alpha_r^{n-m-3} \end{Vmatrix}$$

genau vom Range $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ und eine allgemeine Kurve $n - m - 3$ ter Ordnung hat genau $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ Bedingungen zu erfüllen, um durch die r aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstandenen Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ zu gehen.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

IV Liegt eine nicht zerfallende Raumkurve auf einer Fläche m ter oder niedrigerer Ordnung, und hat eine allgemeine Fläche m ter Ordnung q_m linear unabhängige Bedingungen zu erfüllen, um die Raumkurve zu enthalten, so stellen die r Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$, welche den r scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entsprechen, für die adjungierten Kurven $n - m - 3$ ter Ordnung genau $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - q_m$ Bedingungen dar $(n - m - 3 \geqq 0)$.

In anderer Fassung, mit Benützung von Gleichung (7) (S. 23), lautet der Satz:

IV a Gibt es k_m linear unabhängige Flächen m ter Ordnung, welche alle durch eine nicht zerfallende Raumkurve gehen, so stellen die genannten r Doppelpunkte für die adjungierten Kurven $n - m - 3$ ter Ordnung genau $r - \left(\frac{m(m+1)(m+2)}{6} - k_m\right)$ Bedingungen dar und umgekehrt $(k_m \geqq 1,\ n - m - 3 \geqq 0)$.

Die Zahl ρ kann höchstens gleich $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ werden. Daher erhält man aus Gleichung (7) für $n - m - 3 \geqq 0$

$$q_m \geqq r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

oder

$$q_m \geqq m\,n - p' + 1, \tag{8}$$

wenn $p' = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - r$ gesetzt wird.

Ist $n - m - 3 < 0$ so erhält man aus Gleichung (6) zusammen mit Gleichung (5) (S. 21)

$$q_m = r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$$

$$q_m = mn - p' + 1. \tag{9}$$

Diese Gleichungen gelten nur für irreduktible Raumkurven auf Flächen $m$ter oder niedrigerer Ordnung. Daraus erhält man den Satz (vgl. die Definition von q_m S. 23):

IVb Liegt eine irreduktible Raumkurve $n$ter Ordnung auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung, so können von den Schnittpunkten mit einer allgemeinen Fläche $m$ter Ordnung mindestens $mn - p'$ willkürlich angenommen werden, ohne daß die Fläche die Raumkurve ganz enthält. Ist $n - m - 3 < 0$, so hat eine allgemeine Fläche $m$ter Ordnung genau $mn - p' + 1$ Bedingungen zu erfüllen, um die Raumkurve ganz zu enthalten.

Ist für $n - m - 3 \geqq 0$ $q_m = mn - p' + 1 + s$ $(s \geqq 1)$, dann stellen nach Satz III die r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ für die adjungierten Kurven $n - m - 3$ter Ordnung höchstens $r + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - mn + p' - 1 - s$ Bedingungen dar und nach Satz IV genau so viele Bedingungen, wenn die Raumkurve irreduktibel ist und auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt. Diese Zahl ist $\frac{(n-m-3)(n-m)}{2} + 1 - s$, woraus folgt, daß es s linear unabhängige Kurven $n - m - 3$ter Ordnung durch die r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ gibt. Damit ist noch folgender Satz bewiesen:

V Hat für $n - m - 3 \geqq 0$ eine allgemeine Fläche $m$ter Ordnung $q_m = mn - p' + s + 1$ Bedingungen zu erfüllen, um eine Raumkurve ganz zu enthalten, so gehen durch die r aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstandenen Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$ mindestens $s = q_m - mn + p' - 1$ linear unabhängige Kurven $n - m - 3$ter Ordnung und genau so viele, wenn die Raumkurve irreduktibel ist und auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt.

6.

Für Raumkurven, welche irreduktibel sind und auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegen, läßt sich der Satz II (S. 19) umkehren.

Nach Gleichung (7) (S. 23) sind unter den $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ linear unabhängigen Flächen $m$ter Ordnung k_m linear unabhängige Flächen, welche alle durch die Raumkurve gehen. Bedeutet $F_m''(x, y, z) = 0$ die übrig bleibende $\infty^{q_m - 1}$ Schar von Flächen $m$ter Ordnung, so geht keine Fläche der Schar durch die Raumkurve, weil es sonst mehr als k_m linear unabhängige Flächen $m$ter Ordnung geben würde, welche alle durch die Raumkurve gehen. Die algebraische Funktion $F_m''(x, y, z)$ der Riemannschen Fläche hat daher q_m homogene Konstante und kann nur dann auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwinden, wenn alle Konstanten null sind.

Es ist nun zu beweisen, daß jede Funktion

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g^{m}(x, z) \quad [1]), \tag{1}$$

deren Konstanten A_i für $n - m - 3 \geq 0$ folgende Gleichungen befriedigen:

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots n - m - 3,$$

auf die Form $F_m(x, y, z)$ einer ganzen rationalen Funktion in x, y, z vom Grade m gebracht werden kann, wenn die Raumkurve irreduktibel ist und auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt.

Gibt es nämlich eine Funktion Φ der Form (1), welche nicht zugleich von der Form $F_m(x, y, z)$ ist, so hat man in $F_m''(x, y, z) + \lambda \Phi$ eine Funktion der Riemannschen Fläche, welche im Endlichen überall endlich bleibt, in r Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei Werte annimmt und für $z = \infty$ zur $m$ten Ordnung unendlich wird. Sie ist daher nach Satz I von der Form (1).

Für die Funktion $F_m''(x, y, z) + \lambda \Phi$ können q_m Nullpunkte willkürlich angenommen werden, ohne daß sie auf der ganzen Riemannschen Fläche verschwindet. Denn die q_m Gleichungen, welche aussagen, daß die Funktion in q_m Punkten null wird, können durch Werte der $q_m + 1$ homogenen Konstanten befriedigt werden, welche nicht alle null sind [2]).

Wäre nun die Gleichung

$$F_m''(x, y, z) + \lambda \Phi = 0$$

1) Die Funktion $g^{m}(x, z)$ ist dieselbe wie in Satz I (S. 15), also in x höchstens vom Grade $n - 1$, wenn $m > n - 1$ ist.

2) Pascal, Repertorium d. höh. Math. Bd. I, S. 77.

für die ganze Riemannsche Fläche erfüllt, ohne daß alle Konstanten null sind, so hätte man

$$\text{für } \lambda \neq 0 \qquad \Phi = -\frac{1}{\lambda} F'''_m(x, y, z)$$

$$\text{und für } \lambda = 0 \qquad F'''_m(x, y, z) = 0.$$

Beides ist aber nach dem Vorhergehenden ausgeschlossen.

Nach Satz I entspricht der Funktion $F'''_m(x, y, z) + \lambda \Phi$ eine Funktion von der Form (1) mit denselben Eigenschaften. Daher können auch für die Funktion (1) q_m Nullpunkte auf der Riemannschen Fläche willkürlich angenommen werden, ohne daß sie identisch verschwindet. Weil aber die Raumkurve irreduktibel ist und auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt, so ist $q_m = q'_m$ (s. Gl. 6 S. 29), wo q'_m die Zahl der homogenen willkürlichen Konstanten der Funktion (1) bedeutet. Für die Funktion (1) können also q_m Nullpunkte willkürlich angenommen werden, ohne daß sie identisch verschwindet. Das ist aber unmöglich, wie in Art. 4 (S. 23) bewiesen worden ist. Die Annahme, daß es eine Funktion von der Form (1) gibt, welche nicht zugleich von der Form $F_m(x, y, z)$ ist, führt also zu einem Widerspruch und daraus erhält man folgende Umkehrung von Satz II:

VI Ist $f_n(x, z) = 0$ die Projektionskurve einer irreduktiblen Raumkurve, welche auf einer Fläche $m$ter oder niedrigerer Ordnung liegt, so kann jede Funktion

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g^{(m)}(x, z),$$

deren Konstanten A_i für $n - m - 3 \geqq 0$ die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots n - m - 3$$

befriedigen, als Funktion der durch $f_n(x, z) = 0$ definierten Riemannschen Fläche auf die Form $F_m(x, y, z)$ einer ganzen rationalen Funktion vom $m$ten Grade in x, y, z gebracht werden.

Für irreduktible Raumkurven auf Flächen $m$ter oder niedrigerer Ordnung kann man aus diesem Satz eine naheliegende Folgerung ziehen. Es seien $F_{\mu'} = 0$ und $F_{\mu} = 0$ die Gleichungen zweier Flächen μ'ter und μter Ordnung, von denen $F_{\mu} = 0$ die Raumkurve in keinem wirklichen Doppelpunkt schneidet, während $F_{\mu'} = 0$ durch das vollständige Schnittpunktssystem der Fläche $F_{\mu} = 0$ mit der Raumkurve hindurchgeht. Man kann annehmen, daß die Funktion F_{μ} in keinem Doppelpunkt der Riemannschen Fläche verschwindet.

Damit dieser Fall nicht eintritt, hat man das willkürliche Projektionszentrum nur so zu wählen, daß es auf keinem der $n \cdot \mu$ Kegel liegt, welche die Raumkurve von einem der $n \cdot \mu$ Schnittpunkte der Fläche $F_\mu = 0$ mit der Raumkurve aus projiciert.

Dann ist $\frac{F_{\mu'}}{F_\mu}$ eine Funktion der Riemannschen Fläche, welche im Endlichen überall endlich bleibt, in den r aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstandenen Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ zwei Werte annimmt und für $z = \infty$ zur $\mu' - \mu$ten Ordnung unendlich wird.

Nach Satz I ist sie daher von der Form

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + g(\overset{m}{x, z}),$$

wenn $\mu' - \mu = m$ ist, und zwischen den Konstanten A_i bestehen für $n - m - 3 \geqq 0$ die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, \ldots n - m - 3.$$

Mit Berücksichtigung von Satz VI folgt daraus

$$\frac{F_{\mu'}}{F_\mu} = F_m,$$

d. h. die $(\mu' - \mu)\, n$ Schnittpunkte der Fläche $F_{\mu'} = 0$ mit der Raumkurve, welche nicht auf der Fläche $F_\mu = 0$ liegen, bilden das vollständige Schnittpunktssystem einer Fläche $\mu' - \mu$ter Ordnung mit der Raumkurve.

Aus Gleichung (7) (S. 29) folgt noch für irreduktible Raumkurven auf Flächen $m$ter oder niedrigerer Ordnung für $n - m - 3 \geqq 0$

$$r = \rho - \frac{(m+1)(m+2)}{2} + q_m.$$

Hieraus erhält man mit Benützung der Ungleichung

$$\rho \leqq \frac{(n - m - 1)(n - m - 2)}{2}$$

und der Gleichung (7) (S. 23)

$$r < \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - k_m$$
$$\leqq \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} - k_m.$$

Für $n - m - 3 < 0$ gilt nur das untere Zeichen, wie aus Gleichung (9) (S. 31) folgt.

In Worten lautet dieses Ergebnis:

Gibt es k_m linear unabhängige Flächen $m$ter Ordnung ($k_m \geq 1$), VII
welche alle durch eine irreduktible Raumkurve $n$ter Ordnung gehen, so gilt für die Zahl r der scheinbaren Doppelpunkte der Raumkurve die Beziehung

$$r < \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} - k_m .$$

Für $n - m - 3 < 0$ gilt nur das Gleichheitszeichen.

7.

Die Ergebnisse der letzten Artikel lassen sich leicht auf Raumkurven anwenden, welche auf einer nicht zerfallenden Fläche zweiter Ordnung $F_2 = 0$ liegen.

Nach Satz V gehen mindestens $q_m - mn + p' - 1$ linear unabhängige Kurven $n - m - 3$ter Ordnung durch die r Doppelpunkte der Projektionskurve $f_n(x, z) = 0$, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind. Diese Zahl ist positiv, wenn

$$q_m - mn + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - r - 1 \geq 1$$

oder

$$r \leq q_m - mn + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2 \text{ ist.} \qquad (1)$$

Setzt man nun $m = \frac{n-2}{2}$ (n gerade), so muß jede Fläche $\frac{n-2}{2}$ter Ordnung $F_{\frac{n-2}{2}} = 0$, welche durch die Raumkurve geht, folgende Form haben:

$$F_{\frac{n-2}{2}} = F_2 \cdot F_{\frac{n-2}{2}-2} = 0 \quad (n > 4), \qquad (2)$$

wo $F_{\frac{n-2}{2}-2}$ ebenfalls eine ganze rationale Funktion in x, y, z vom Grade $\frac{n-2}{2} - 2$ ist. Somit gibt es

$$k_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{n-2}{2} - 1\right)\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) \qquad (3)$$

linear unabhängige Flächen $\frac{n-2}{2}$ter Ordnung, welche alle durch die Raumkurve gehen und die Gleichung (3) gilt offenbar auch für $n = 4$.

Nach Gleichung (7) (S. 23) folgt daraus für die Zahl $q_{\frac{n-2}{2}}$

$$q_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{n-2}{2}+1\right)\left(\frac{n-2}{2}+2\right)\left(\frac{n-2}{2}+3\right) - k_{\frac{n-2}{2}}. \qquad (4)$$

Somit erhält man für $m = \frac{n-2}{2}$ aus Gleichung (1) mit Benützung von (3) und (4)

$$r \leqq \frac{n(n-2)}{4} - 1. \qquad (5)$$

Ist also (5) erfüllt, dann geht jedenfalls eine Kurve $n - m - 3$ter oder $\frac{n-4}{2}$ter Ordnung $\varphi_{\frac{n-4}{2}}$ durch die r Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$, welche den r scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entsprechen. Dann ist aber $y\,\varphi_{\frac{n-4}{2}}$ eine Funktion der Riemannschen Fläche, welche im Endlichen überall endlich bleibt, in allen Doppelpunkten von $f_n(x, z) = 0$ nur einen Wert annimmt und für $z = \infty$ zur $\frac{n-2}{2}$ten Ordnung unendlich wird.

Nach Satz I ist sie daher von der Form $\varphi_{\frac{n-2}{2}}$, wenn $\varphi_{\frac{n-2}{2}}$ eine ganze rationale Funktion von x und z vom Grad $\frac{n-2}{2}$ ist.

Die Funktion $y\,\varphi_{\frac{n-4}{2}} - \varphi_{\frac{n-2}{2}}$ verschwindet also auf der ganzen Riemannschen Fläche, ohne daß sie identisch verschwindet, und die Gleichung

$$y\,\varphi_{\frac{n-4}{2}} - \varphi_{\frac{n-2}{2}} = 0 \qquad (6)$$

stellt daher eine Fläche $\frac{n-2}{2}$ter Ordnung dar, welche durch die Raumkurve geht. Nach (2) muß sie die Fläche zweiter Ordnung $F_2 = 0$, auf welcher die Raumkurve liegt, ganz enthalten und das ist für $n = 4$ unmöglich, für $n > 6$ nur dann möglich, wenn $F_2 = 0$ folgende Form hat:

$$F_2 = y\,\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \qquad (7)$$

wo φ_1 und φ_2 ganze rationale Funktionen von x und z vom Grad des Index sind.

Daraus folgt für y die Darstellung

$$y = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Damit y im Endlichen nicht unendlich wird, muß φ_2 in allen Punkten der Riemannschen Fläche, in denen φ_1 verschwindet, eben-

falls null werden. Für $n \geqq 6$ schneidet also die Kurve $\varphi_2 = 0$ die Gerade $\varphi_1 = 0$, wie man leicht sieht, in mindestens drei Punkten, weshalb $\varphi_2\ \varphi_1$ ganz enthalten muß. Die Fläche zweiter Ordnung $F_2 = 0$ würde daher nach (7) gegen die Voraussetzung in zwei Ebenen zerfallen.

Die Ungleichung (5) führt also zu einem Widerspruch und daraus folgt für die Zahl r der scheinbaren Doppelpunkte der Raumkurve

$$r \geqq \frac{n(n-2)}{4}. \tag{8}$$

Für ungerades n erhält man auf dieselbe Weise $r > \frac{(n-1)^2}{4}$.

Für $n \geqq 6$ ist $k_{\frac{n-2}{2}} \geqq 1$. Wendet man nun den Satz VII (S. 35) für $m = \frac{n-2}{2}$ an, so folgt mit Benützung von Gleichung (3)

$$r \leq \frac{\left(n - \frac{n-2}{2} - 1\right)\left(n - \frac{n-2}{2} - 2\right)}{2} + \frac{\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right)\left(\frac{n-2}{2}+2\right)}{6} - \frac{\left(\frac{n-2}{2}-1\right)\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}{6}$$

oder

$$r \leqq \frac{n(n-2)}{4}. \tag{9}$$

Für ungerades n erhält man mit $m = \frac{n-1}{2}$ auf dieselbe Weise

$$r \leq \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Für $n = 4$ läßt sich die Formel (9) nicht beweisen. Aus (8) und (9) erhält man somit den Satz:

Liegt eine irreduktible Raumkurve $n$ter Ordnung auf einer VIII
nicht zerfallenden Fläche zweiter Ordnung, so hat sie $\frac{n(n-2)}{4}$ (bzw. $\frac{(n-1)^2}{4}$ für ungerades n) scheinbare Doppelpunkte ($n \neq 4$).

8.

In diesem Artikel soll untersucht werden, in welchem Fall eine ebene Kurve $n$ter Ordnung Projektion einer Raumkurve $n$ter Ordnung von einem nicht auf ihr gelegenen Punkt aus sein kann.

Projiciert man eine Raumkurve in der in Art. 3 angegebenen Weise von einem nicht auf ihr gelegenen Punkt aus auf eine Ebene und ist $f_n(x, z) = 0$ die Projektionskurve, welche die in dem genannten Artikel bezeichneten Eigenschaften besitzen soll, so ist nach Satz II die Koordinate y als algebraische Funktion der zu $f_n(x, z) = 0$ gehörigen Riemannschen Fläche von der Form

$$y = \sum_{i=1}^{r} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + \overset{1}{g}(x, z), \tag{1}$$

wo $\overset{1}{g}(x, z)$ eine lineare Funktion in x und z ist und zwischen den Konstanten A_i die $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + \ldots + A_r = 0\\
&A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_r\alpha_r = 0\\
&A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + \ldots + A_r\alpha_r = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1\alpha_1^{n-4} + A_2\alpha_2^{n-4} + \ldots + A_r\alpha_r^{n-4} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

in welchen die Koordinaten α_i, β_i der r aus scheinbaren Doppelpunkten entstandenen Doppelpunkte von $f_n(x, z) = 0$ enthalten sind.

Diese Gleichungen (2) können stets befriedigt werden, solange $r > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ist, und zwar durch Werte der Konstanten A_i, welche nicht alle verschwinden, so daß y in mindestens einem Doppelpunkt von $f_n(x, z) = 0$ zwei verschiedene Werte annimmt und daher eine Raumkurve und keine ebene Kurve darstellt.

Ist aber $r \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, so ist die Kurve $f_n(x, z) = 0$ nur dann die Projektion einer Raumkurve, wenn höchstens $r - 1$ von den Gleichungen (2) linear unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnten jene Gleichungen nur für Werte der Konstanten A_i befriedigt werden, welche alle null sind. Die durch (1) dargestellte Raumkurve wäre dann der Schnitt des Projektionskegels mit der Ebene $y - \overset{1}{g}(x, z) = 0$, also eine ebene Kurve.

Die Matrix

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \ldots 1\\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_r\\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots \beta_r\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_1^{n-4} & \alpha_2^{n-4} & \ldots \alpha^{rn-4}
\end{vmatrix}$$

ist also höchstens vom Range $r-1$, woraus folgt, daß die r Doppelpunkte der Projektionskurve, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind, für die adjungierten Kurven $n-4$ter Ordnung nur $r-1$ Bedingungen darstellen.

Umgekehrt ist diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß die Gleichungen (2) durch Werte der Konstanten A_i befriedigt werden können, welche nicht alle null sind, so daß durch (1) eine wirkliche Raumkurve dargestellt ist.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Damit eine ebene Kurve $f_n(x,z)=0$ Projektion einer Raum- IX
kurve mit r scheinbaren Doppelpunkten von einem nicht auf der Raumkurve gelegenen Punkt aus sei, ist für $r \leqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ notwendig, daß r Doppelpunkte von $f_n(x,z)=0$ für die adjungierten Kurven $n-4$ter Ordnung nur $r-1$ Bedingungen darstellen. Diese Bedingung ist auch hinreichend dafür, daß $f_n(x,z)=0$ die Projektion einer Raumkurve ist, doch kann die Raumkurve auch weniger als r scheinbare Doppelpunkte haben. Für $r > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ besteht keine Bedingung[1]).

9.

Der Satz vom letzten Artikel kann auf Raumkurven erweitert werden, welche von einem mehrfachen Punkt aus projiciert werden.

Nach Art. 3 hat der eine Raumkurve vom Punkt $x=z=t=0$ aus projicierende Kegel $m$ter Ordnung die Form

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

und die Gleichung des Projektionskegels vom Punkt $y=z=t=0$ aus ist

$$Y = a_k y^m + b_{k+1} y^{m-1} + \ldots + q_n = 0, \qquad (2)$$

wo $m+k=n$ ist und die a, b, ... q ganze homogene Funktionen von z und t vom Grad des Index sind. Die Hauptkante $z=t=0$ schneidet die Raumkurve in k Punkten. Soll nun die Raumkurve im Projektionszentrum $x=z=t=0$ einen $k$fachen Punkt haben, so müssen sich aus der Gleichung

$$a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu = 0 \qquad (3)$$

k Werte $\frac{\lambda}{\mu} = \infty$ ergeben, wenn man die k aus $a_k = 0$ berechneten

1) Vgl. Nöther, Zur Grundlegung der Th. d. alg. R. K. S. 23.

Werte von $\frac{z}{t}$, welche alle als endlich vorausgesetzt werden, in a_{k+1} und b_{k+1} einsetzt. Denn nach Art. 3 bestimmen diese k aus (3) berechneten Werte von $\frac{\lambda}{\mu}$ k Ebenen $\lambda x + \mu y = 0$, welche durch die k Schnittpunkte der Hauptkante mit der Raumkurve hindurchgehen. Sind aber alle diese k Werte von $\frac{\lambda}{\mu}$ unendlich, so fallen alle k Schnittpunkte der Hauptkante mit der Raumkurve in die Ebene $x = 0$, d. h. der Punkt $x = z = t = 0$ ist ein k facher Punkt der Raumkurve. Daher muß a_{k+1} für jede einzelne Wurzel $\frac{z}{t}$ von $a_k = 0$ verschwinden, b_{k+1} dagegen nicht, so daß a_k ein Teiler von a_{k+1} wird, während $b_{k+1} = 0$ keine Wurzel mit $a_k = 0$ gemein hat.

Nun folgt aber aus (1) für die n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots . x_n$ von $A = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 \quad + \ldots + x_n \quad &= - \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{k+2}}{a_k} \qquad (4) \\ \ldots \ldots \ldots

definiert ist, ist y eine mit x gleichverzweigte algebraische Funktion, welche für k im Endlichen gelegene Punkte und in den m unendlich fernen Punkten der Riemannschen Fläche zur ersten Ordnung unendlich wird. Denn nach Gleichung (2) wird y für k endliche Werte von z unendlich und zwar zur ersten Ordnung, weil a_k und b_{k+1} keinen Teiler gemeinsam haben. Man sieht leicht, daß y in denjenigen Punkten der Riemannschen Fläche unendlich wird, welche den k Punkten entsprechen, in denen die Tangenten im $k$fachen Punkt die Projektionskurve der Raumkurve treffen.

Es werde nun vorausgesetzt, daß die Projektionskurve $f_m(x, z) = 0$ nur einfache Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzt; ferner seien in dem $k$fachen Punkt der Raumkurve, in welchem sich das Projektionszentrum befindet, alle Tangenten getrennt, so daß die letzteren die Projektionskurve in k nicht zusammenfallenden Punkten schneiden. Durch passende Wahl der Koordinatenebene $t = 0$ kann man bewirken, daß die Tangentialebenen der einzelnen Zweige der Raumkurve im $k$fachen Punkt, welche durch die Hauptkante $z = t = 0$ gehen, nicht mit der Ebene $t = 0$ zusammenfallen. Dann ist die oben gemachte Annahme, daß $a_k = 0$ lauter endliche Wurzeln $\frac{z}{t}$ habe, erfüllt. Wählt man außerdem die Lage der Koordinatenebenen so, wie in Art. 3 zum Beweis des Satzes I näher ausgeführt wurde, so läßt sich die Koordinate y nach Satz I in folgender Form darstellen:

$$y = \sum_{i=1}^{r+k} A_i \frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)} + \overset{1}{g}(x, z), \tag{6}$$

wo die Summe über alle r Doppelpunkte von $f_m(x, z) = 0$, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind, und über die k Punkte, in denen die Tangenten im $k$fachen Punkt die Projektionskurve schneiden, zu erstrecken ist.

Zwischen den Konstanten A_i bestehen folgende $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$ Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^{r+k} A_i \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{\mu} = 0 \text{ für } \lambda + \mu = 0, 1, 2, \ldots m - 4. \tag{7}$$

Diese Gleichungen können immer durch Werte der Konstanten A_i befriedigt werden, welche nicht alle null sind, wenn $r + k > \frac{(m-2)(m-3)}{2}$ ist. Ist aber $r + k \leq \frac{(m-2)(m-3)}{2}$,

so dürfen in (7) höchstens $r + k - 1$ Gleichungen linear unabhängig sein, damit sie überhaupt durch Werte der Konstanten A_i befriedigt werden können, welche nicht alle null sind. Andernfalls würde man $y = g(x, z)$ erhalten, wodurch nur eine ebene Kurve dargestellt wird.

Es folgt also, daß die Matrix der Koefficienten der Konstanten A_i

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r+k} \\ \beta_i & \beta_2 & \dots & \beta_{r+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-4} & \alpha_2^{m-4} & \dots & \alpha_{r+k}^{m-4} \end{Vmatrix}$$

höchstens vom Rang $r + k - 1$ ist, und hieraus ergibt sich weiter[1]), daß die r Doppelpunkte von $f_m(x, z) = 0$, welche aus scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve entstanden sind, und die k Punkte, in denen die Tangenten im $k$fachen Punkt die Projektionskurve treffen, für die Kurven $m - 4$ter Ordnung nur $r + k - 1$ Bedingungen darstellen.

Umgekehrt ist diese Bedingung für $r + k \leq \frac{(m-2)(m-3)}{2}$ auch hinreichend dafür, daß $f_m(x, z) = 0$ die Projektion einer Raumkurve ist. Denn $r + k - 1$ Gleichungen in (7) können durch Werte der Konstanten A_i befriedigt werden, welche nicht alle null sind. Es ist nur noch zu beweisen, daß durch (6) wirklich eine Raumkurve und keine ebene Kurve dargestellt wird, wenn nicht alle Konstanten A_i verschwinden.

Angenommen, es fehlen in (6) nicht alle Glieder, welche Doppelpunkten von $f_m(x, z) = 0$ entsprechen, so nimmt y in mindestens einem der Doppelpunkte zwei verschiedene Werte an und (6) stellt daher eine wirkliche Raumkurve dar. Fehlen aber alle die genannten Glieder, so nimmt y zwar in allen Doppelpunkten nur einen Wert an, wird aber in mindestens einem im Endlichen gelegenen Punkt unendlich. Die durch (6) dargestellte Raumkurve muß dann durch das Projektionszentrum gehen und zwar so oft, als noch Glieder $\frac{f(x, \beta_i)}{(x - \alpha_i)(z - \beta_i)}$ vorhanden sind, also mindestens einmal. Denn wäre $f_m(x, z) = 0$ die Projektion einer Raumkurve

1) Vgl. Art. 4 S. 25.

von einem nicht auf ihr gelegenen Punkt, so hätte man den Fall von Art. 8, und y könnte im Endlichen nicht unendlich werden. Auch in diesem Fall kann die Raumkurve keine ebene Kurve sein, weil sie von einem auf ihr gelegenen Punkt nicht in eine Gerade projiciert wird.

Man erhält somit den Satz:

Damit eine ebene Kurve $n-k$ ter Ordnung die Projektion einer X
Raumkurve n ter Ordnung mit r scheinbaren Doppelpunkten von einem k fachen Punkt aus sei, ist für $r+k \leqq \frac{(n-k-2)(n-k-3)}{2}$ notwendig, daß r Doppelpunkte der Projektionskurve zusammen mit k weiteren Punkten für die Kurven $n-k-4$ ter Ordnung nur $r+k-1$ Bedingungen darstelleu. Die Bedingung ist auch hinreichend dafür, daß die ebene Kurve Projektion einer Raumkurve ist, doch kann sich die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte und die Ordnung der Raumkurve erniedrigen.

Für $r+k > \frac{(n-k-2)(n-k-3)}{2}$ besteht keine Bedingung.

Literaturverzeichnis.

M. Nöther, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1882.

H. Valentiner, Zur Theorie der Raumkurven. Acta mathematica. Bd. 2, 1883.

G. Halphen, Sur la classification des courbes gauches algébriques. journal de l'école Polytechnique, cahier 52, 1882.

E. B. Christoffel, Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Annali di matematica. serie II, tomo X, 1880—1882.

H. Stahl, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bemerkungen zur Theorie der Abelschen Funktionen (zweite Note), Bd. 7, 1904, und Ueber die Darstellung algebraischer Funktionen und Abelscher Integrale aus gegebenen Elementen, Bd. 12, 1907.

J. C. Fields, Algebraic proofs of the Riemann-Roch Theorem and of the independence of the conditions of adjointness. Acta mathematica, Bd. 26, 1902.

A. Brill, Ueber algebraische Raumkurven. Mathematische Annalen. Bd. 64, 1907.